Erläuternde Hinweise zu Übungszettel 1

- Wir betrachten in der Vorlesung meist nur binäre Verknüpfungen.
- Eine binäre Verknüpfung ordnet zwei (nicht notwendigerweise verschiedenen) Elementen einer Menge ein drittes (nicht notwendiger verschiedenes) Element zu.
- Beispiel: Die Ihnen bekannte Addition zweier Zahlen.

$2 + 3 = 5$

Das Element 2 und das Element 3 werden verknüpft. Ergebnis ist das Element 5

Es gibt Verknüpfungen, die nicht alle Regeln erfüllen, die normalerweise beim Rechnen gelten.

Assoziativgesetz

Weil die folgende Regel nicht für alle Verknüpfungen gilt, stellt man sich gerne die Frage:

Gilt für die Verknüpfung, um die es gerade geht, das Assoziativgesetz?

Wenn man drei Elemente miteinander verknüpfen möchte, muss man sich entscheiden, welche man zuerst verrechnet.

Beispiel: 1+2+4

Wir müssen uns zuerst entscheiden, ob wir 1 und 2 zusammenzählen oder zuerst 2 und 4.

(1 und 4 zusammenzufassen ist uns verboten, sofern wir nicht wissen ob das Kommutativgesetz gilt)

Beim normalen Rechnen, wissen wir, dass hier dasselbe rauskommt, egal ob wir zuerst 1 und 2 verknüpfen oder zuerst 2 und 4. (1+2) + 4 = 3 + 4 = 7 bzw. 1 + (2+4) = 1 + 6 = 7

Für die Verknüpfungen, die wir in der Vorlesung betrachten, müssen wir diese Eigenschaft jedoch immer erst für jede Verknüpfung beweisen, ehe wir diese Eigenschaft nutzen dürfen.

In mehr Formelsprache: Wir müssen zeigen:
Für alle x,y,z aus der Menge auf der die Verknüpfung namens # definiert ist gilt:

(x # y) # z = x # (y # z)

- Es könnte sein, dass (x # y) # z nicht gleich x # (y # z) ist.
- Um das Ergebnis A von (x # y) # z zu bestimmen muss also zunächst (x # y) bestimmt werden und dann das Ergebnis mit z an zweiter Position verknüpft werden.

- Um das Ergebnis B von x # (y # z) zu bestimmen, muss also zunächst (y # z) bestimmt werden und dann das Ergebnis mit x an erster Position verknüpft werden.

- Stimmen beide Ergebnisse (Ergebnis A und Ergebnis B) für alle denkbaren x,y,z aus der Menge überein, gilt das Assoziativgesetz.
- Sofern man gezeigt hat, dass das Assoziativgesetz gilt, kann man die Klammern auch weglassen, denn es geht ja beides mal um dasselbe Objekt x # y # z

Kommutativgesetz

Weil die folgende Regel nicht für alle Verknüpfungen gilt, stellt man sich gerne die Frage:

Gilt für die Verknüpfung, um die es gerade geht, das Kommutativgesetz?

Wenn man zwei Elemente miteinander verknüpfen möchte, muss man sich entscheiden, in welcher Reihenfolge man das tun möchte.

Beispiel: 1+2

Wir müssen uns zuerst entscheiden, ob wir zu 1 noch 2 dazunehmen oder ob wir zu 2 noch 1 dazunehmen.

Beim normalen Rechnen, wissen wir, dass hier dasselbe rauskommt, egal in welcher Reihenfolge wir schreiben.

Für die Verknüpfungen, die wir in der Vorlesung betrachten, müssen wir diese Eigenschaft jedoch immer erst für jede Verknüpfung beweisen, ehe wir diese Eigenschaft nutzen dürfen.

In mehr Formelsprache: Wir müssen zeigen:
Für alle x,y, aus der Menge auf der die Verknüpfung namens # definiert ist gilt:

$x \# y = y \# x$

Distributivgesetz

- Für die Formulierung von Distributivgesetzen benötigt man grundsätzlich zwei Verknüpfungen (z.B. „plus“ und „mal“)

  (1+3)*2 = 1*2+3*2

- Sofern nicht klar ist, ob die beiden anderen Gesetze (assoziativ und kommutativ) gelten, kann man verschiedene Distributivgesetze formulieren. Von diesen Distributivgesetzen gelten je nach verwendeten Verknüpfungen, manchmal nur ein paar, manchmal sogar gar keine. Deswegen muss man für alle Verknüpfungen erst beweisen, ob und welche Distributivgesetze gelten.
- Alle denkbaren Kombinationen sind auf dem Übungszettel 1 in der Aufgabe e) zur Prüfung durch sie für zwei konkrete Verknüpfungen vorgesehen.