4. Übungsblatt – Lösungshinweise

1. Eindeutigkeit des neutralen Elements

Beweisen Sie, dass das neutrale Element e einer Gruppe $(G, \ \star)$ eindeutig ist. ***3 BE***

Hinweis:

Führen Sie einen Widerspruchsbeweis.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1

Beweis:

Angenommen, es gäbe zwei verschiedene neutrale Elemente $e_1, e_2 \in G$ in einer Gruppe $(G, \star)$.

D. h.:

(1) $e_1 \neq e_2$

(2) $\forall_{g \in G} \ e_1 \star g = g \star e_1 = g$ (e_1 ist neutrales Element)

(3) $\forall_{g \in G} \ e_2 \star g = g \star e_2 = g$ (e_2 ist neutrales Element)

Dann gilt:

$e_1 \overset{(3)}{\triangleq} e_1 \star e_2 \overset{(2)}{\triangleq} e_2$, also $e_1 = e_2$ und dies ist ein Widerspruch zu (1) $e_1 \neq e_2$. ■

2. Eine kleine Gruppe?

Die Menge $\{-1, 0, 1\}$ ist Teilmenge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussage:

$(\{-1, 0, 1\}, \ \cdot)$ ist bezüglich der Multiplikation eine Gruppe.

(Gemeint ist die „normale“ Multiplikation, die Sie aus der Grundschule kennen.) ***3 BE***

Lösungshinweise zu Aufgabe 2

Um die Aussage $(\{-1, 0, 1\}, \ \cdot)$ ist bezüglich der Multiplikation eine Gruppe zu widerlegen, reicht es aus eine der Gruppeneigenschaften zu widerlegen. Hier soll (G3) widerlegt werden, indem die Negation von (G3) gezeigt wird.

(G3) $\forall_{g \in G} \ \exists_{g^{-1} \in G} \ g \star g^{-1} = g^{-1} \star g = e$ (Existenz inverser Elemente)

Es gilt:

Das neutrale Element e bzgl. der Multiplikation in $\mathbb{Z}$ ist die 1, auch in $\{-1, 0, 1\} \subset \mathbb{Z}$ ist die 1 das neutrale Element, denn:

- $-1 \cdot 1 = 1 \cdot (-1) = -1$
- $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$
- $1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$

Zu zeigen: $\exists_{g_0 \in \{-1,0,1\}} \ \forall_{g \in \{-1,0,1\}} \ g_0 \cdot g \neq 1 \vee g \cdot g_0 \neq 1$

Wähle $g_0 = 0$ und sei $g \in \{-1, 0, 1\}$ beliebig, dann gilt:

$$g_0 \cdot g = g \cdot g_0 = 0 \neq 1$$

Somit ist (G3) widerlegt und $(\{-1, 0, 1\}, \ \cdot)$ ist keine Gruppe. ■

3. Diedergruppe D_4 und Vertauschbarkeit – Zentralisator

Die Diedergruppe $(D_4, \circ)$ ist nicht kommutativ, d.h. im Allgemeinen gilt für Deckabbildungen φ und ψ des Quadrats: $\varphi \circ \psi \neq \psi \circ \varphi$

Zu jeder einzelnen Deckabbildung $\varphi \in D_4$ kann man die Deckabbildungen $\psi \in D_4$ finden, für die gilt $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$, die also bzgl. der Verkettung von Abbildungen mit φ vertauscht werden dürfen. Die Menge aller Deckabbildungen aus D_4, die bzgl. der Verkettung $\circ$ mit φ vertauscht werden dürfen, nennt man Zentralisator $Z_{(D_4,\circ)}(\varphi)$ von φ bzgl. $(D_4, \circ)$: $Z_{(D_4,\circ)}(\varphi) := \{\psi \in D_4 \mid \varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi\}$

Bestimmen Sie für alle Deckabbildungen des Quadrats jeweils den Zentralisator bzgl. $(D_4, \circ)$ und erläutern Sie jeweils, was das Ergebnis bedeutet. *6 BE*

Lösungshinweise zu Aufgabe 3

Betrachtet man die Verknüpfungstafel der Diedergruppe $(D_4, \circ)$, dann lassen sich folgende Zentralisatoren ablesen:

$\circ$	id	d	d^2	d^3	s	ds	d^2s	d^3s
id	id	d	d^2	d^3	s	ds	d^2s	d^3s
d	d	d^2	d^3	id	d^3s	s	ds	d^2s
d^2	d^2	d^3	id	d	d^2s	d^3s	s	ds
d^3	d^3	id	d	d^2	ds	d^2s	d^3s	s
s	s	ds	d^2s	d^3s	id	d	d^2	d^3
ds	ds	d^2s	d^3s	s	d^3	id	d	d^2
d^2s	d^2s	d^3s	s	ds	d^2	d^3	id	d
d^3s	d^3s	s	ds	d^2s	d	d^2	d^3	id

(1) $Z_{(D_4,\circ)}(id) = D_4$

Die identische Abbildung id lässt sich mit allen Deckabbildungen des Quadrats vertauschen, weil id das neutrale Element bzgl. $\circ$ ist und dafür nach (G3) gilt:

$$\forall_{\varphi \in D_4}\ id \circ \varphi = \varphi = \varphi \circ id$$

(2) $Z_{(D_4,\circ)}(d^2) = D_4$

$d^2 = d_{M,180°}$, die Drehung um 180° um den Mittelpunkt des Quadrats lässt sich mit allen Deckdrehungen des Quadrats vertauschen, weil Z_4 kommutativ bzw. abelsch ist und mit allen Deckspiegelungen des Quadrats, da die Drehung um 180° eine Punktspiegelung ist, die mit jeder Achsenspiegelung an einer Achse durch das Spiegelzentrum der Punktspiegelung vertauschbar ist.

(3) $Z_{(D_4,\circ)}(d) = Z_{(D_4,\circ)}(d^3) = \{id, d, d^2, d^3\} = Z_4$

Die Drehung um 90° und die Drehung um 270° vertauschen nur mit den anderen Drehungen wegen $d_{Z,\alpha} \circ d_{Z,\beta} = d_{Z,\alpha+\beta} = d_{Z,\beta+\alpha} = d_{Z,\beta} \circ d_{Z,\alpha}$.

(4) $Z_{(D_4,\circ)}(s) = \{id, d^2, s, d^2s\} = Z_{(D_4,\circ)}(d^2s)$

(5) $Z_{(D_4,\circ)}(ds) = \{id, d^2, ds, d^3s\} = Z_{(D_4,\circ)}(d^3s)$

Die Spiegelung an einer Geraden vertauscht wegen (1) und (2) immer mit id und d^2 und, weil eine Spiegelung selbstinvers ist, auch mit sich selbst, sowie mit Spiegelungen an Geraden, die senkrecht auf der Ausgangsgeraden stehen (vgl. Vorlesung und $s \perp d^2s$ sowie $ds \perp d^3s$).

4. *Untergruppenkriterium*

Beweisen Sie folgende Aussage, bei der es sich um eine Richtung des Satzes 2.2.1 aus dem Skript handelt:

Wenn für eine Teilmenge $U \subseteq G$ einer Gruppe $(G, \star)$ folgendes gilt

(UG1) $\forall_{a,b \in U}\ a \star b \in U$ (Abgeschlossenheit) und

(UG2) $\forall_{a \in U}\ a^{-1} \in U$ (Inverse in U enthalten),

dann ist $(U, \star)$ eine Gruppe.

Hinweis: Sie müssen also nachweisen, dass aus $U \subseteq G$, (UG1) und (UG2) alle Gruppeneigenschaften (G0), (G1), (G2) und (G3) folgen. *6 BE*

Lösungshinweise zu Aufgabe 4

Voraussetzung: $U \subseteq G$, $(G,\star)$ ist eine Gruppe und es gilt:

(UG1) $\forall_{a,b \in U}\ a \star b \in U$ (Abgeschlossenheit) (*)

(UG2) $\forall_{a \in U}\ a^{-1} \in U$ (Inverse in U enthalten) (**)

Zu zeigen: In $(U,\circ)$ gelten alle vier Eigenschaften einer Gruppe:

(G0) $\forall_{a,b \in U}\ a \star b \in U$ (Abgeschlossenheit)

(G1) $\forall_{a,b,c \in U}\ a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$ (Assoziativität)

(G2) $\exists_{e \in U}\ \forall_{a \in U}\ a \star e = e \star a = a$ (Existenz eines neutralen Elements)

(G3) $\forall_{a \in U}\ \exists_{a^{-1} \in U}\ a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e$ (Existenz inverser Elemente)

Beweis:

(G0) gilt wegen Voraussetzung (UG1).

(G1) Die Gültigkeit von (G1) ergibt sich wie folgt:

(1) Da $U \subseteq G$, ist jedes Element von U auch ein Element von G.

(2) Weil nach Voraussetzung $(G,\star)$ eine Gruppe ist, gilt (G1) für alle Elemente $a, b, c \in G$ und damit insbesondere für alle Elemente $a, b, c \in U \subseteq G$.

Damit ist U bzgl. der Verknüpfung $\star$ assoziativ.

(G2) Die Gültigkeit von (G2) ergibt sich wie folgt:

(1) Wegen Voraussetzung (UG2) liegt das Inverse jedes Elements $a \in U$ wieder in U $(a^{-1} \in U)$.

(2) Nach der Eigenschaft (G3) in $(G,\star)$ gilt: $\forall_{a \in U \subseteq G}\ \exists_{a^{-1} \in U \subseteq G} a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e$, wobei e das inverse Element von $(G,\star)$ ist.

(3) Da die Teilmenge $U \subseteq G$ nach Voraussetzung (UG1) bezüglich der Verknüpfung von $(G,\star)$ abgeschlossen ist, muss das neutrale Element $e \in G$ auch Element von $U \subseteq G$ sein.

(4) Da $U \subseteq G$ und für jedes Element a aus G gilt $a \star e = e \star a = a$, folgt, dass auch für jedes Element a aus U gilt: $a \star e = e \star a = a$

Das bedeutet aber, dass das neutrale Element e von G auch neutrales Element von U ist.

(G3) Die Gültigkeit von (G3) ergibt sich wie folgt:

(1) Für jedes $a \in U$ ist nach (UG2) auch $a^{-1} \in U$. Das ist aber das inverse Element zu a aus G.

(2) Da wie unter (G2) gezeigt das neutrale Element e von G auch neutrales Element von U ist und wegen (UG1) auch in U liegt, folgt direkt: $\forall_{a,a^{-1} \in U}\ a \star a^{-1} = e \in U$ ∎

5. *Spezielle Gruppen*

Es sei

- $M := (id, d, d^3)$ eine Teilmenge von Z_6,
- $N := (id, d^2, d^4)$ eine Teilmenge von Z_6 und
- $4\mathbb{Z} := \{z \in \mathbb{Z} \mid \exists_{t \in \mathbb{Z}}\ z = 4 \cdot t\}$.

Beweisen Sie:

a) $(M,\ \circ)$ ist keine Gruppe. *1 BE*

Lösungshinweise zu Aufgabe 5a

$(M,\ \circ)$ ist keine Gruppe.

$(M,\ \circ)$ ist keine Gruppe, denn $(M,\ \circ)$ ist nicht abgeschlossen.

Zu zeigen: $\exists_{a,b \in M}\ a \circ b \notin M$

Wähle $a = b = d$, dann gilt

$$a \circ b = d \circ d = d^2 \notin M$$

■

b) $(N,\ \circ)$ ist eine Gruppe. *3 BE*

Lösungshinweise zu Aufgabe 5b

$\circ$	id	d^2	d^4
id	id	d^2	d^4
d^2	d^2	d^4	id
d^4	d^4	id	d^2

$(N,\ \circ)$ ist eine Gruppe.

Betrachtet man die Verknüpfungstafel von $(N,\ \circ)$, dann lässt sich an der Tafel erkennen:

(G0): Die Menge ist abgeschlossen bzgl. $\circ$, denn als Ergebnisse treten nur Elemente von N auf.

(G2): id ist das neutrale Element von $\circ$, denn die Zeile mit id ist identisch mit der Zeile der Abbildungen, die zuerst ausgeführt werden und die Spalte ist identisch mit den Abbildungen, die danach ausgeführt werden.

(G3): Jede der Abbildungen hat ein inverses Element in N, denn in jeder Zeile und jeder Spalte tritt das neutrale Element einmal an der passenden Stelle (kommutativ) auf.

(G1): Die Assoziativität lässt sich an der Verknüpfungstafel nicht erkennen, jedoch wird die Assoziativität geerbt von der Gruppe $(Z_6, \circ)$, denn $N \subseteq Z_6$. Siehe Lösungshinweise zu Aufgabe 4.

■

c) $(4\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe. ***3 BE***

Hinweise: $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe, $4\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ und $(Z_6, \ \circ)$ ist eine Gruppe.

Lösungshinweise zu Aufgabe 5c

$(4\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe.

Laut dem Hinweis gelten die Voraussetzungen, $4\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ und $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe, weshalb die Untergruppenkriterien zum Beweis genutzt werden können.

(UG1): (4ℤ ist abgeschlossen bzgl. +)

Zu zeigen ist: $\forall_{a,b \in 4\mathbb{Z}} \ a + b \in 4\mathbb{Z}$

Seien $a, b \in 4\mathbb{Z}$ beliebig, dann gibt es aufgrund der Definition von $4\mathbb{Z}$ $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ mit $a = 4 \cdot t_1$ und $b = 4 \cdot t_2 \quad (*)$.

Es gilt:

$$a + b \overset{(*)}{\widehat{=}} 4 \cdot t_1 + 4 \cdot t_2 \overset{Distributivgesetz \ in \ (\mathbb{Z},+,\cdot)}{\widehat{=}} 4 \cdot (t_1 + t_2) \overset{t_3 := t_1 + t_2}{\widehat{=}} 4 \cdot t_3.$$

Da $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}$ abgeschlossen bzgl. + ist, folgt $t_3 \in \mathbb{Z}$ und somit $a + b = 4 \cdot t_3 \in 4\mathbb{Z}$.

(UG2): (inverse Elemente in $4\mathbb{Z}$: $\forall_{a \in 4\mathbb{Z}} \ -a \in 4\mathbb{Z}$)

Für jedes beliebige $a \in 4\mathbb{Z}$ sei das Inverse $-a$ definiert durch $(-1) \cdot a$.
$-a$ ist dann auch ein Element von $4\mathbb{Z}$, denn für jedes $a \in 4\mathbb{Z}$ gibt es ein $t \in \mathbb{Z}$ mit $a = 4 \cdot t$.

$-a = (-1) \cdot a = (-1) \cdot 4 \cdot t = 4 \cdot (-1) \cdot t = 4 \cdot (-t)$ und $-t \in \mathbb{Z}$, denn $t \in \mathbb{Z}$ und da $(\mathbb{Z}, +)$ Gruppe ist, ist $-t$ (als Inverses) ein Element von $\mathbb{Z}$ und somit $-a \in \mathbb{Z}$.
Da $4\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ gilt $a + (-a) = (-a) + a = 0$, denn $-a$ ist auch invers in $(\mathbb{Z}, +)$.

Somit ist $(4\mathbb{Z}, +)$ eine Gruppe. ■

Erreichbare Gesamtpunktzahl für dieses Übungsblatt: ***25 BE***