6. Übungsblatt

1. *Erzeugendensystem zur additiven Gruppe $(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4, +)$*

In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass die additive Gruppe $(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4, +)$ sich durch das Element $([1]_5, [1]_4)$ erzeugen lässt, dass also gilt: $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4 = \langle([1]_5, [1]_4)\rangle$

Bearbeiten Sie dazu folgende Teilaufgaben:

a) Erläutern Sie, warum alle Elemente der additiven Gruppe $(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4, +)$ in folgendem Schema enthalten sind. ***1 BE***

$([4]_5, [0]_4)$	$([4]_5, [1]_4)$	$([4]_5, [2]_4)$	$([4]_5, [3]_4)$
$([3]_5, [0]_4)$	$([3]_5, [1]_4)$	$([3]_5, [2]_4)$	$([3]_5, [3]_4)$
$([2]_5, [0]_4)$	$([2]_5, [1]_4)$	$([2]_5, [2]_4)$	$([2]_5, [3]_4)$
$([1]_5, [0]_4)$	$([1]_5, [1]_4)$	$([1]_5, [2]_4)$	$([1]_5, [3]_4)$
$([0]_5, [0]_4)$	$([0]_5, [1]_4)$	$([0]_5, [2]_4)$	$([0]_5, [3]_4)$

b) Überzeugen Sie sich davon, dass man alle Elemente von $(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4, +)$ erhält, indem Sie in obigem Schema wie folgt vorgehen: Beginnen Sie mit $([1]_5, [1]_4)$ und addieren Sie $([1]_5, [1]_4)$. Zum Ergebnis dieser Summe addieren Sie wieder $([1]_5, [1]_4)$ und so weiter... Tragen Sie hierzu Pfeile $\longrightarrow$ in das Schema ein, die jeweils für $+ ([1]_5, [1]_4)$ stehen. Dabei wird jeweils $([1]_5, [1]_4)$ zum Element am Fuß des Pfeils addiert und die Spitze des Pfeils zeigt auf den Wert der so gebildeten Summe. Der in obigem Schema abgebildete Pfeil steht, zusammen mit den Elementen an seinem Fuß und seiner Spitze, z. B. für folgende Gleichung:

$$([1]_5, [1]_4) + ([1]_5, [1]_4) = ([2]_5, [2]_4)$$

$$([1]_5, [1]_4) \longrightarrow ([2]_5, [2]_4)$$

Tragen Sie alle Pfeile in das Schema ein und überzeugen Sie sich davon, dass Sie so jedes Element erreichen und schließlich wieder beim Element $([1]_5, [1]_4)$ landen. ***5 BE***

2. *Idee der Produktgruppen verstehen*

Diese Aufgabe soll ihnen helfen, die Idee der Produktgruppen (vgl. Definition 3.3.1) zu durchschauen. Dazu bilden wir aus der Diedergruppe $(D_3, \circ)$ mit der Verkettung $\circ$ von Deckabbildungen als Gruppenverknüpfung und der Gruppe $(\mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\}, \cdot)$ mit der Multiplikation $\cdot$ von Restklassen als Gruppenverknüpfung wie folgt eine Produktgruppe $(D_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\}, *)$:

$$D_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\} := \{(\varphi, z) | \varphi \in D_3, z \in \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\}\}$$
$$(\varphi_1, z_1) * (\varphi_2, z_2) := (\varphi_1 \circ \varphi_2, z_1 \cdot z_2)$$

a) Zeigen Sie, dass gilt: $\forall_{a,b \in D_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\}}\ a * b \in D_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\}$ ***1,5 BE***

b) Zeigen Sie, dass $(D_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\}, *)$ bzgl. der Verknüpfung $*$ assoziativ ist. ***2 BE***

c) Geben Sie das neutrale Element der Produktgruppe $(D_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\}, *)$ an und zeigen Sie, dass es das neutrale Element der Verknüpfung $*$ ist. ***2 BE***

d) Geben Sie für jedes Element der Produktgruppe $(D_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\}, *)$ das zugehörige inverse Element bzgl. der Verknüpfung $*$ an und zeigen Sie, dass es das jeweilige inverse Element ist. ***4,5 BE***

e) Begründen Sie, warum Sie mit den Ergebnissen der Aufgaben a) bis d) gezeigt haben, dass $(D_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\}, *)$ eine Gruppe ist. ***1 BE***

3. *Rechengesetze in $(\mathbb{Z}_n, +,\cdot)$*

Beweisen Sie, dass in $(\mathbb{Z}_n, +,\cdot)$, bei einem festen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, folgende Rechengesetze gelten:

a) $\forall_{[a]_n,[b]_n,[c]_n \in \mathbb{Z}_n}\ [a]_n \cdot ([b]_n + [c]_n) = [a]_n \cdot [b]_n + [a]_n \cdot [c]_n$ — ***2,5 BE***

b) $\forall_{[a]_n,[b]_n,[c]_n \in \mathbb{Z}_n}\ ([a]_n + [b]_n) \cdot [c]_n = [a]_n \cdot [c]_n + [b]_n \cdot [c]_n$ — ***2,5 BE***

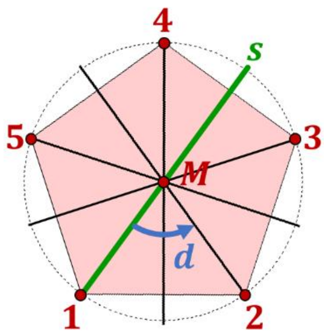
c) $\forall_{[a]_n,[b]_n \in \mathbb{Z}_n}\ [a]_n + [b]_n = [b]_n + [a]_n$ — ***1 BE***

4. *Diedergruppe D_5 mit Hilfe von Permutationen notiert*

Die Abbildung zeigt ein reguläres Fünfeck, bei dem alle Symmetrieachsen (unter anderem die Achse $\boldsymbol{s}$) und eine Deckdrehung, nämlich die Drehung $\boldsymbol{d} := d_{M,72°}$, abgebildet sind. Mit Hilfe von Achsenspiegelungen und Drehungen lässt sich die Diedergruppe wie folgt darstellen:

$$D_5 = \{id, d, d^2, d^3, d^4, s, ds, d^2s, d^3s, d^4s\}$$

Diese Menge lässt sich aber auch durch Permutationen in Zykelschreibweise darstellen.



a) Geben Sie für jedes Element von D_5 die entsprechende Zykel-Schreibweise an.
Beispiel: $d = (12345)$ — ***4 BE***

b) Berechnen Sie das Ergebnis der Verkettung nebenstehender Abbildungen, in der Zykel-Schreibweise und geben Sie jeweils auch an, welche Deckabbildung (Drehung bzw. Achsenspiegelung) des regulären Fünfecks sich als Ergebnis der Verkettung ergibt.

$(13524) \circ (13)(45)$

$(25)(34) \circ (14)(23)$

$(12345) \circ (14253)$

$(12)(35) \circ (15432)$ — ***4 BE***

Erreichbare Gesamtpunktzahl für dieses Übungsblatt: 31 BE

Abgabetermin und Hinweise

- Bitte laden Sie Ihre Bearbeitung dieses Übungsblatts bis spätestens

  Freitag, 12.07.2024, 10:00 Uhr

  im OLAT-Ordner **Abgaben Übungsblätter** hoch.
- Bearbeitungen auf der ersten Seite rechts oben mit den Namen der Gruppenmitglieder und der Nummer des Abgabeteams (im Beispiel Abgabeteam 50) beschriften sowie als **eine PDF-Datei** pro Übungsblatt mit den Bearbeitungen aller Aufgaben des Übungsblatts abspeichern.
- Informationen und Materialien zur Vorlesung finden Sie im Internet unter folgender Adresse:
  https://tim-lutz.de