6. Übungsblatt – Lösungshinweise

1. ***Erzeugendensystem zur additiven Gruppe*** $(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4, +)$

In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass die additive Gruppe $(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4, +)$ sich durch das Element $([1]_5, [1]_4)$ erzeugen lässt, dass also gilt: $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4 = \langle([1]_5, [1]_4)\rangle$

Bearbeiten Sie dazu folgende Teilaufgaben:

a) Erläutern Sie, warum alle Elemente der additiven Gruppe $(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4, +)$ in folgendem Schema enthalten sind. ***1 BE***

$([4]_5, [0]_4)$	$([4]_5, [1]_4)$	$([4]_5, [2]_4)$	$([4]_5, [3]_4)$
$([3]_5, [0]_4)$	$([3]_5, [1]_4)$	$([3]_5, [2]_4)$	$([3]_5, [3]_4)$
$([2]_5, [0]_4)$	$([2]_5, [1]_4)$	$([2]_5, [2]_4)$	$([2]_5, [3]_4)$
$([1]_5, [0]_4)$	$([1]_5, [1]_4)$	$([1]_5, [2]_4)$	$([1]_5, [3]_4)$
$([0]_5, [0]_4)$	$([0]_5, [1]_4)$	$([0]_5, [2]_4)$	$([0]_5, [3]_4)$

b) Überzeugen Sie sich davon, dass man alle Elemente von $(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4, +)$ erhält, indem Sie in obigem Schema wie folgt vorgehen: Beginnen Sie mit $([1]_5, [1]_4)$ und addieren Sie $([1]_5, [1]_4)$. Zum Ergebnis dieser Summe addieren Sie wieder $([1]_5, [1]_4)$ und so weiter… Tragen Sie hierzu Pfeile $\longrightarrow$ in das Schema ein, die jeweils für $+\,([1]_5, [1]_4)$ stehen. Dabei wird jeweils $([1]_5, [1]_4)$ zum Element am Fuß des Pfeils addiert und die Spitze des Pfeils zeigt auf den Wert der so gebildeten Summe. Der in obigem Schema abgebildete Pfeil steht, zusammen mit den Elementen an seinem Fuß und seiner Spitze, z. B. für folgende Gleichung:

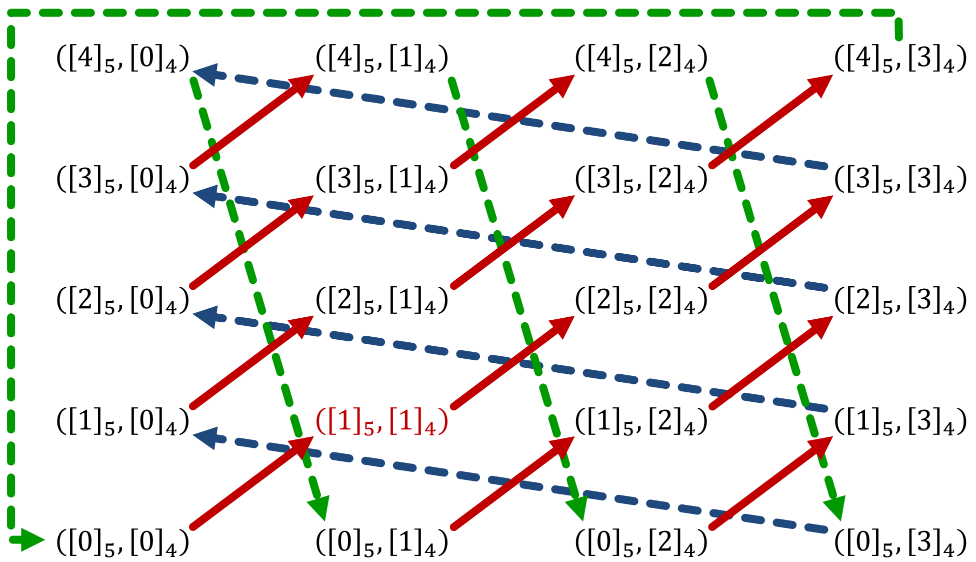
$$([1]_5, [1]_4) + ([1]_5, [1]_4) = ([2]_5, [2]_4)$$

$$([1]_5, [1]_4) \longrightarrow ([2]_5, [2]_4)$$

Tragen Sie alle Pfeile in das Schema ein und überzeugen Sie sich davon, dass Sie so jedes Element erreichen und schließlich wieder beim Element $([1]_5, [1]_4)$ landen. ***5 BE***

a) Die Elemente von $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4$ lassen sich mithilfe von kombinatorischen Überlegungen bestimmen. Es gibt 5 Elemente in $\mathbb{Z}_5$. Das sind $[0]_5, [1]_5, [2]_5, [3]_5, [4]_5$. Es gibt 4 Elemente in $\mathbb{Z}_4$. Das sind $[0]_4$, $[1]_4$, $[2]_4$, $[3]_4$. Es gibt folglich 20 Elemente in $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4$ (als Kombination von einem Element aus $\mathbb{Z}_5$ und einem Element aus $\mathbb{Z}_4$). Ordnet man diese 20 Elemente nach Zeilen (Veränderung der ersten Komponente (aus $\mathbb{Z}_5$)) erhält man 5 Zeilen.
Ordnet man diese Elemente zusätzlich nach Spalten (Veränderung der zweiten Komponente (aus $\mathbb{Z}_4$)) so erhält man 4 Spalten.
Insgesamt ist durch die Anordnung der 20 Elemente in Zeilen und Spalten, das gezeigte Schema entstanden.
Zur Anordnung im Detail: Das Schema ist so aufgebaut, dass nach rechts der zweite Eintrag bei $[0]_4$ beginnend pro Spalte jeweils um eins vergrößert wird. Da $\mathbb{Z}_4$ nur vier Elemente hat und $[4]_4 = [0]_4$ ist, kann es keine weiteren Spalten geben. Analog wird nach oben der erste Eintrag bei $[0]_5$ beginnend pro Zeile jeweils um eins vergrößert. Da $\mathbb{Z}_5$ nur fünf Elemente hat und $[5]_5 = [0]_5$ ist, kann es keine weiteren Zeilen geben.

b)



Die Darstellung der Pfeile ist bewusst farblich variiert, um Strukturen optisch sichtbar zu machen. Die grünen und blauen Pfeile erfüllen mathematisch-darstellungstechnisch dieselbe Funktion wie die roten Pfeile.

2. Idee der Produktgruppen verstehen

In Definition 3.3.1 haben Sie Produktgruppen kennengelernt. Diese Aufgabe soll ihnen helfen, die Idee der Produktgruppen zu durchschauen. Dazu bilden wir aus der Diedergruppe $(D_3,\circ)$ mit der Verkettung $\circ$ von Deckabbildungen als Gruppenverknüpfung und der Gruppe $(\mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\},\cdot)$ mit der Multiplikation $\cdot$ von Restklassen als Gruppenverknüpfung wie folgt eine Produktgruppe $(D_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\},*)$:

$$D_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\} := \{(\varphi,z) | \varphi \in D_3, z \in \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\}\}$$
$$(\varphi_1,z_1) * (\varphi_2,z_2) := (\varphi_1 \circ \varphi_2, z_1 \cdot z_2)$$

a) Zeigen Sie, dass gilt: $\forall_{a,b \in D_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\}}\ a * b \in D_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\}$ ***1,5 BE***

b) Zeigen Sie, dass $(D_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\},*)$ bzgl. der Verknüpfung $*$ assoziativ ist. ***2 BE***

c) Geben Sie das neutrale Element der Produktgruppe $(D_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\},*)$ an und zeigen Sie, dass es das neutrale Element der Verknüpfung $*$ ist. ***2 BE***

d) Geben Sie für jedes Element der Produktgruppe $(D_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\},*)$ das zugehörige inverse Element bzgl. der Verknüpfung $*$ an und zeigen Sie, dass es das jeweilige inverse Element ist. ***4,5 BE***

e) Begründen Sie, warum Sie mit den Ergebnissen der Aufgaben ***a)*** bis ***d)*** gezeigt haben, dass $(D_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\},*)$ eine Gruppe ist. ***1 BE***

a) Da sowohl $(D_3,\circ)$ als auch $(\mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\},\cdot)$ Gruppen sind, sind sie bzgl. ihrer jeweiligen Gruppenoperationen $\circ$ bzw. $\cdot$ abgeschlossen. Es gilt also:

$$\forall_{\varphi_1,\varphi_2 \in D_3}\ \varphi_1 \circ \varphi_2 \in D_3 \qquad (i)$$

und

$$\forall_{z_1,z_2 \in \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\}}\ z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\} \qquad (ii)$$

Damit ergibt sich:

$$\forall_{(\varphi_1,z_1),(\varphi_2,z_2) \in D_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\}}\ (\varphi_1,z_1) * (\varphi_2,z_2)$$
$$\overset{\text{Definition } *}{\cong} \left(\overbrace{\varphi_1 \circ \varphi_2}^{\in D_3\ (i)}, \overbrace{z_1 \cdot z_2}^{\in \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\}\ (ii)} \right) \in D_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\}$$

■

b) Da sowohl $(D_3,\circ)$ als auch $(\mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\},\cdot)$ bzgl. ihrer jeweiligen Gruppenoperationen $\circ$ bzw. $\cdot$ assoziativ sind, gilt:

$$\forall_{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\in D_3}\ \varphi_1 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_3) = (\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ \varphi_3 \qquad (\#)$$

und

$$\forall_{z_1,z_2,z_3\in \mathbb{Z}_3\setminus\{[0]_3\}}\ z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 \qquad (\#\#)$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\forall_{(\varphi_1,z_1),(\varphi_2,z_2),(\varphi_3,z_3)\in D_3\times\mathbb{Z}_3\setminus\{[0]_3\}}\ (\varphi_1,z_1) * \big((\varphi_2,z_2) * (\varphi_3,z_3)\big) &\overset{\text{Definition }*}{=} (\varphi_1,z_1) * (\varphi_2 \circ \varphi_3, z_2 \cdot z_3)\\ &\overset{\text{Definition }*}{=} \big(\varphi_1 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_3), z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)\big)\\ &\overset{(\#)}{=} \big((\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ \varphi_3, z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)\big)\\ &\overset{(\#\#)}{=} \big((\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ \varphi_3, (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3\big)\\ &\overset{\text{Definition }*}{=} (\varphi_1 \circ \varphi_2, z_1 \cdot z_2) * (\varphi_3,z_3)\\ &\overset{\text{Definition }*}{=} \big((\varphi_1,z_1) * (\varphi_2,z_2)\big) * (\varphi_3,z_3)\end{aligned}$$

■

c) Behauptung:
Das neutrale Element der Produktgruppe $(D_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\},*)$ bzgl. der Operation $*$ ist $(id,[1]_3)$.

Zu zeigen ist:

$$\forall_{(\varphi,z)\in D_3\times\mathbb{Z}_3\setminus\{[0]_3\}}\ (\varphi,z) * (id,[1]_3) = (\varphi,z)$$

Zunächst gilt:

- id ist das neutrale Element der Diedergruppe $(D_3,\circ)$, es gilt also:
  $$\forall_{\varphi\in D_3}\ \varphi \circ id = \varphi \qquad (\blacksquare)$$
- $[1]_3$ ist das neutrale Element der Gruppe $(\mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\},\cdot)$, es gilt also:
  $$\forall_{z\in\mathbb{Z}_3\setminus\{[0]_3\}}\ z \cdot [1]_3 = z \qquad (\blacksquare\blacksquare)$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}\forall_{(\varphi,z)\in D_3\times\mathbb{Z}_3\setminus\{[0]_3\}}\ (\varphi,z) * (id,[1]_3) &\overset{\text{Definition }*}{=} (\varphi \circ id, z \cdot [1]_3)\\ &\overset{(\blacksquare)}{=} (\varphi, z \cdot [1]_3)\\ &\overset{(\blacksquare\blacksquare)}{=} (\varphi,z)\end{aligned}$$

■

d) $D_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\} = \{(id,[1]_3),(id,[2]_3),(d,[1]_3),(d,[2]_3),(d^2,[1]_3),(d^2,[2]_3),$
$(s,[1]_3),(s,[2]_3),(ds,[1]_3),(ds,[2]_3),(d^2s,[1]_3),(d^2s,[2]_3)\}$

Zu jedem Element (φ,z) von $D_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\}$ ist das jeweilige inverse Element gesucht, also das Element $(\varphi,z)^{-1}$, für das gilt:

$$(\varphi,z) * (\varphi,z)^{-1} = (id,[1]_3) \qquad (\Delta)$$

Da id das neutrale Element in $(D_3,\circ)$ und $[1]_3$ das neutrale Element in $(\mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\},\cdot)$ ist, folgt aus (Δ) zusammen mit der Definition von $*$:

$$(\varphi,z)^{-1} = (\varphi^{-1},z^{-1}) \qquad (\Delta\Delta)$$

Mit Hilfe der Gleichung $(\Delta\Delta)$ kann man Inverse identifizieren.

Es wird nun für jedes einzelne Element von $D_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\}$ ein inverses Element angegeben und gezeigt, dass obige Bedingung (Δ) erfüllt ist:

$$(id,[1]_3) * (id,[1]_3)^{-1} = (id,[1]_3) * (id,[1]_3) \overset{\text{Definition } *}{\triangleq} (id \circ id, [1]_3 \cdot [1]_3)$$
$$\overset{id \text{ ist neutrales Element bzgl.} \circ}{\triangleq} (id,[1]_3 \cdot [1]_3) \overset{\text{Definition } \cdot}{\triangleq} (id,[1 \cdot 1]_3) = (id,[1]_3)$$

$$(id,[2]_3) * (id,[2]_3)^{-1} = (id,[2]_3) * (id,[2]_3) \overset{\text{Definition } *}{\triangleq} (id \circ id, [2]_3 \cdot [2]_3)$$
$$\overset{id \text{ neutr. Element bzgl.} \circ}{\triangleq} (id,[2]_3 \cdot [2]_3) \overset{\text{Definition } \cdot}{\triangleq} (id,[2 \cdot 2]_3) = (id,[4]_3) = (id,[1]_3)$$

$$(d,[1]_3) * (d,[1]_3)^{-1} = (d,[1]_3) * (d^2,[1]_3) \overset{\text{Definition } *}{\triangleq} (d \circ d^2, [1]_3 \cdot [1]_3) = (d^3,[1]_3 \cdot [1]_3)$$
$$\overset{d^3=id}{\triangleq} (id,[1]_3 \cdot [1]_3) \overset{\text{Definition } \cdot}{\triangleq} (id,[1 \cdot 1]_3) = (id,[1]_3)$$

$$(d,[2]_3) * (d,[2]_3)^{-1} = (d,[2]_3) * (d^2,[2]_3) \overset{\text{Definition } *}{\triangleq} (d \circ d^2, [2]_3 \cdot [2]_3) = (d^3,[2]_3 \cdot [2]_3)$$
$$\overset{d^3=id}{\triangleq} (id,[2]_3 \cdot [2]_3) \overset{\text{Definition } \cdot}{\triangleq} (id,[2 \cdot 2]_3) = (id,[4]_3) = (id,[1]_3)$$

$$(d^2,[1]_3) * (d^2,[1]_3)^{-1} = (d^2,[1]_3) * (d,[1]_3) \overset{\text{Definition } *}{\triangleq} (d^2 \circ d, [1]_3 \cdot [1]_3)$$
$$= (d^3,[1]_3 \cdot [1]_3) \overset{d^3=id}{\triangleq} (id,[1]_3 \cdot [1]_3) = (id,[1 \cdot 1]_3) = (id,[1]_3)$$

$$(d^2,[2]_3) * (d^2,[2]_3)^{-1} = (d^2,[2]_3) * (d,[2]_3) \overset{\text{Definition } *}{\triangleq} (d^2 \circ d, [2]_3 \cdot [2]_3)$$
$$= (d^3,[2]_3 \cdot [2]_3) \overset{d^3=id}{\triangleq} (id,[2]_3 \cdot [2]_3) = (id,[2 \cdot 2]_3)$$
$$= (id,[4]_3) = (id,[1]_3)$$

$$(s,[1]_3) * (s,[1]_3)^{-1} = (s,[1]_3) * (s,[1]_3) \overset{\text{Definition } *}{\triangleq} (s \circ s, [1]_3 \cdot [1]_3)$$
$$\overset{s \text{ involutorisch}}{\triangleq} (id,[1]_3 \cdot [1]_3) = (id,[1 \cdot 1]_3) = (id,[1]_3)$$

$$(s,[2]_3) * (s,[2]_3)^{-1} = (s,[2]_3) * (s,[2]_3) \overset{\text{Definition } *}{\triangleq} (s \circ s, [2]_3 \cdot [2]_3)$$
$$\overset{s \text{ involutorisch}}{\triangleq} (id,[2]_3 \cdot [2]_3) = (id,[2 \cdot 2]_3) = (id,[4]_3) = (id,[1]_3)$$

$$(ds,[1]_3) * (ds,[1]_3)^{-1} = (ds,[1]_3) * (ds,[1]_3) \overset{\text{Definition } *}{\triangleq} (ds \circ ds, [1]_3 \cdot [1]_3)$$
$$\overset{ds \text{ involutorisch}}{\triangleq} (id,[1]_3 \cdot [1]_3) = (id,[1 \cdot 1]_3) = (id,[1]_3)$$

$$(ds,[2]_3) * (ds,[2]_3)^{-1} = (ds,[2]_3) * (ds,[2]_3) \overset{\text{Definition } *}{\triangleq} (ds \circ ds, [2]_3 \cdot [2]_3)$$
$$\overset{ds \text{ involutorisch}}{\triangleq} (id,[2]_3 \cdot [2]_3) = (id,[2 \cdot 2]_3) = (id,[4]_3) = (id,[1]_3)$$

$$(d^2s,[1]_3) * (d^2s,[1]_3)^{-1} = (d^2s,[1]_3) * (d^2s,[1]_3) \overset{\text{Definition } *}{\triangleq} (d^2s \circ d^2s,[1]_3 \cdot [1]_3)$$
$$\overset{d^2s \text{ involutorisch}}{\triangleq} (id,[1]_3 \cdot [1]_3) = (id,[1 \cdot 1]_3) = (id,[1]_3)$$

$$(d^2s,[2]_3) * (d^2s,[2]_3)^{-1} = (d^2s,[2]_3) * (d^2s,[2]_3) \overset{\text{Definition } *}{\triangleq} (d^2s \circ d^2s,[2]_3 \cdot [2]_3)$$
$$\overset{d^2s \text{ involutorisch}}{\triangleq} (id,[2]_3 \cdot [2]_3) = (id,[2 \cdot 2]_3) = (id,[4]_3) = (id,[1]_3)$$

■

e) Da in den Aufgaben ***a)*** bis ***d)*** gezeigt wurde, dass die Gruppenaxiome für $(D_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\},*)$ erfüllt sind, handelt es sich bei $(D_3 \times \mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]_3\},*)$ um eine Gruppe.

3. Rechengesetze in $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$

Beweisen Sie, dass in $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$, bei einem festen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, folgende Rechengesetze gelten:

a) $\forall_{[a]_n,[b]_n,[c]_n \in \mathbb{Z}_n}\ [a]_n \cdot ([b]_n + [c]_n) = [a]_n \cdot [b]_n + [a]_n \cdot [c]_n$ ***2,5 BE***

b) $\forall_{[a]_n,[b]_n,[c]_n \in \mathbb{Z}_n}\ ([a]_n + [b]_n) \cdot [c]_n = [a]_n \cdot [c]_n + [b]_n \cdot [c]_n$ ***2,5 BE***

c) $\forall_{[a]_n,[b]_n \in \mathbb{Z}_n}\ [a]_n + [b]_n = [b]_n + [a]_n$ ***1 BE***

a) Seien $[a]_n, [b]_n$ und $[c]_n$ beliebige Elemente aus $\mathbb{Z}_n$, dann sind $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und es gilt:

$$[a]_n \cdot ([b]_n + [c]_n) \overset{\text{Definition 3.1.1}}{\triangleq} [a]_n \cdot [b+c]_n \overset{\text{Definition 3.1.1}}{\triangleq} [a \cdot (b+c)]_n$$
$$\overset{\text{Distributivgesetz in } \mathbb{Z}}{\triangleq} [a \cdot b + a \cdot c]_n \overset{\text{Definition 3.1.1}}{\triangleq} [a \cdot b]_n + [a \cdot c]_n$$
$$\overset{\text{Definition 3.1.1}}{\triangleq} [a]_n \cdot [b]_n + [a]_n \cdot [c]_n$$

■

b) Seien $[a]_n, [b]_n$ und $[c]_n$ beliebige Elemente aus $\mathbb{Z}_n$, dann sind $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und es gilt:

$$([a]_n + [b]_n) \cdot [c]_n \overset{\text{Definition 3.1.1}}{\triangleq} [a+b]_n \cdot [c]_n \overset{\text{Definition 3.1.1}}{\triangleq} [(a+b) \cdot c]_n$$
$$\overset{\text{Distributivgesetz in } \mathbb{Z}}{\triangleq} [a \cdot c + b \cdot c]_n \overset{\text{Definition 3.1.1}}{\triangleq} [a \cdot c]_n + [b \cdot c]_n$$
$$\overset{\text{Definition 3.1.1}}{\triangleq} [a]_n \cdot [c]_n + [b]_n \cdot [c]_n$$

■

c) Seien $[a]_n, [b]_n$ beliebige Elemente aus $\mathbb{Z}_n$, dann sind $a, b \in \mathbb{Z}$ und es gilt:

$$[a]_n + [b]_n \overset{\text{Definition 3.1.1}}{\triangleq} [a+b]_n \overset{\text{Kommutativität bzgl.+ in } \mathbb{Z}}{\triangleq} [b+a]_n \overset{\text{Definition 3.1.1}}{\triangleq} [b]_n + [a]_n$$

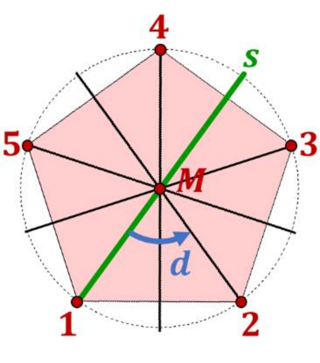
■

4. *Diedergruppe D_5 mit Hilfe von Permutationen notiert*

Die Abbildung zeigt ein reguläres Fünfeck, bei dem alle Symmetrieachsen (unter anderem die Achse $\boldsymbol{s}$) und eine Deckdrehung, nämlich die Drehung $\boldsymbol{d} := d_{M,72°}$, abgebildet sind. Mit Hilfe von Achsenspiegelungen und Drehungen lässt sich die Diedergruppe wie folgt darstellen:

$$D_5 = \{id, d, d^2, d^3, d^4, s, ds, d^2s, d^3s, d^4s\}$$

Diese Menge lässt sich aber auch durch Permutationen in Zykelschreibweise darstellen.



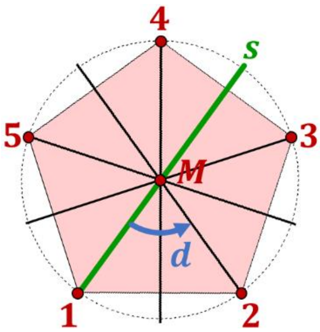
a) Geben Sie für jedes Element von D_5 die entsprechende Zykel-Schreibweise an.
Beispiel: $d = (12345)$ ***4 BE***

b) Berechnen Sie das Ergebnis der Verkettung nebenstehender Abbildungen, in der Zykel-Schreibweise und geben Sie jeweils auch an, welche Deckabbildung (Drehung bzw. Achsenspiegelung) des regulären Fünfecks sich als Ergebnis der Verkettung ergibt.

$(13524) \circ (13)(45)$
$(25)(34) \circ (14)(23)$
$(12345) \circ (14253)$
$(12)(35) \circ (15432)$ ***4 BE***

a)

$id = (1)$
$d = (12345)$
$d^2 = (13524)$
$d^3 = (14253)$
$d^4 = (15432)$
$s = (1)(25)(34) = (25)(34)$ **Bemerkung:** Hier wird der Eckpunkt 1 auf sich selbst abgebildet.
$ds = (12)(35)(4) = (12)(35)$ **Bemerkung:** Hier wird der Eckpunkt 4 auf sich selbst abgebildet.
$d^2s = (13)(2)(45) = (13)(45)$ **Bemerkung:** Hier wird der Eckpunkt 2 auf sich selbst abgebildet.
$d^3s = (14)(23)(5) = (14)(23)$ **Bemerkung:** Hier wird der Eckpunkt 5 auf sich selbst abgebildet.
$d^4s = (15)(24)(3) = (15)(24)$ **Bemerkung:** Hier wird der Eckpunkt 3 auf sich selbst abgebildet.



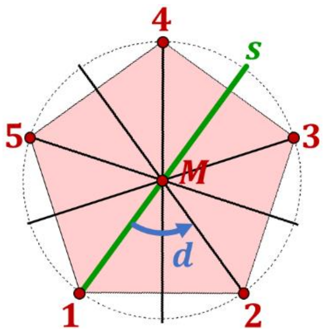
b)

i) $(13524) \circ (13)(45) = (15)(24)(3) = (15)(24)$
Spiegelung an der Symmetrieachse durch den Eckpunkt 3

ii) $(25)(34) \circ (14)(23) = (13524)$
Drehung $d_{M,72°}$ um 72° um den Mittelpunkt M

iii) $(12345) \circ (14253) = (15432)$
Drehung $d_{M,288°}$ um 288° um den Mittelpunkt M

iv) $(12)(35) \circ (15432) = (13)(2)(45) = (13)(45)$
Spiegelung an der Symmetrieachse durch den Eckpunkt 2



Erreichbare Gesamtpunktzahl für dieses Übungsblatt: ***31 BE***