

5. Übungsblatt - Lösungshinweise

1. Die vom Erzeugendensystem $\{d^2, d^3s\}$ erzeugte Untergruppe der Diedergruppe D_6

- a) Bestimmen Sie gemäß Definition 2.2.2 die vom Erzeugendensystem $\{d^2, d^3s\}$ erzeugte Teilmenge $\langle d^2, d^3s \rangle$ von

$$D_6 = \{id, d, d^2, d^3, d^4, d^5, s, ds, d^2s, d^3s, d^4s, d^5s\}.$$

6 BE

Lösungshinweise zu Aufgabe 1a)

Im Folgenden werden die Schritte gemäß Definition 2.2.2 der Reihe nach ausgeführt.

Schritt 0:

$$A_0 = \{d^2, d^3s\}$$

Schritt 1:

- Alle Inverse zu den Elementen aus A_0 werden gebildet:
 - $(d^2)^{-1} = d^4$, da $d^2 \circ d^4 = id$.
Wir haben ein neues Element gefunden, und beziehen es im nächsten Schritt mit ein.
 - $(d^3s)^{-1} = d^3s$, weil Achsenspiegelungen involutorisch, also selbstinvers sind.
 - Die Menge aller Inverser zu Elementen aus A_0 ist also:
 $(A_0)^{-1} := \{(d^2)^{-1}, (d^3s)^{-1}\} = \{d^4, d^3s\}$
- Alle Verknüpfungen der Elemente von A_0 bilden:
 - $d^2 \circ d^3s = (d^2 \circ d^3) \circ s = d^5 \circ s = d^5s$
Wir haben ein neues Element gefunden, und beziehen es im nächsten Schritt mit ein.
 - $d^3s \circ d^2 = d^3 \circ (s \circ d^2) \stackrel{sd^{n-k}=d^ks}{\cong} d^3 \circ (d^4 \circ s) = (d^3 \circ d^4) \circ s = d \circ s = ds$
Wir haben ein neues Element gefunden, und beziehen es im nächsten Schritt mit ein.
 - $d^2 \circ d^2 = d^4$
 - $d^3s \circ d^3s \stackrel{d^3s \text{ involutorisch/selbstinvers}}{\cong} id$
Wir haben ein neues Element gefunden, und beziehen es im nächsten Schritt mit ein.
 - $A_0 \circ A_0 := \{id, d^4, ds, d^5s\}$, die Menge der möglichen Verkettungen aus Elementen von A_0 , die noch nicht in A_0 waren.
- $A_1 = A_0 \cup (A_0)^{-1} \cup (A_0 \circ A_0) = \{d^2, d^3s\} \cup \{d^4, d^3s\} \cup \{id, d^4, ds, d^5s\}$
 $= \{id, d^2, d^4, ds, d^3s, d^5s\}$

Schritt 2:

- Alle Inverse zu den Elementen aus A_1 werden gebildet:
 - $(d^4)^{-1} = d^2$, da $d^4 \circ d^2 = id$.
 - $(d^5s)^{-1} = d^5s$, weil Achsenspiegelungen involutorisch/selbstinvers sind.
 - $(d \circ s)^{-1} = ds$, weil Achsenspiegelungen involutorisch/selbstinvers sind.
 - $(id)^{-1} = id$, weil $id \circ id = id$.
 - Die Menge aller Inverser zu Elementen aus A_1 ist also:
 $(A_1)^{-1} := \{id^{-1}, (d^2)^{-1}, (d^4)^{-1}, (ds)^{-1}, (d^3s)^{-1}, (d^5s)^{-1}\} = \{id, d^2, d^4, ds, d^3s, d^5s\}$
 $= A_1$

- Alle Verknüpfungen der Elemente von A_1 bilden:

\circ	id	d^2	d^4	ds	d^3s	d^5s
id	id	d^2	d^4	ds	d^3s	d^5s
d^2	d^2	d^4	id	d^5s	ds	d^3s
d^4	d^4	id	d^2	d^3s	d^5s	ds
ds	ds	d^3s	d^5s	id	d^2	d^4
d^3s	d^3s	d^5s	ds	d^4	id	d^2
d^5s	d^5s	ds	d^3s	d^2	d^4	id

- $A_1 \circ A_1 = A_1$, da keine neuen Elemente hinzukommen.
- $A_2 = A_1 \cup (A_1)^{-1} \cup (A_1 \circ A_1) = A_1$
- Da im Schritt 2 keine neuen Elemente dazugekommen sind, kann der Algorithmus hier abgebrochen werden.

Also gilt: $\langle d^2, d^3s \rangle = A_0 \cup A_1 = \{id, d^2, d^4, ds, d^3s, d^5s\} \subset D_6$

b) Begründen Sie, warum $(\langle d^2, d^3s \rangle, \circ)$ eine Untergruppe von (D_6, \circ) ist.

2 BE

Lösungshinweise zu Aufgabe 1b)

Nach den Untergruppenkriterien (vgl. Satz 2.2.1) ist wegen $\langle d^2, d^3s \rangle \subset D_6$ nur zu zeigen:

$$(UG1) \quad \forall_{a,b \in U} a \circ b \in U \quad (\text{Abgeschlossenheit})$$

$$(UG2) \quad \forall_{a \in U} a^{-1} \in U \quad (\text{Inverse in } U \text{ enthalten})$$

Wegen der Konstruktion von $\langle d^2, d^3s \rangle$ bei der alle möglichen Verknüpfungen und alle Inverse gebildet werden, ist $\langle d^2, d^3s \rangle$ bzgl. der Verkettung \circ einerseits abgeschlossen (UG1) und enthält andererseits auch alle Inverse zu allen Elementen. Damit ist $(\langle d^2, d^3s \rangle, \circ)$ nach Satz 2.2.1 eine Untergruppe von (D_6, \circ) .

c) Ist $(\langle d^2, d^3s \rangle, \circ)$ kommutativ? Begründen Sie ihre Antwort.

2 BE

Lösungshinweise zu Aufgabe 1c)

$(\langle d^2, d^3s \rangle, \circ)$ ist nicht kommutativ, dies wird bereits in Teilaufgabe a) deutlich, denn:

$d^2 \in \langle d^2, d^3s \rangle$ und $d^3s \in \langle d^2, d^3s \rangle$, jedoch gilt:

$$d^2 \circ d^3s = (d^2 \circ d^3) \circ s = d^5 \circ s = d^5s$$

$$d^3s \circ d^2 = d^3 \circ (s \circ d^2) \stackrel{sd^{n-k}=d^ks}{\cong} d^3 \circ (d^4 \circ s) = (d^3 \circ d^4) \circ s = d \circ s = ds$$

und somit $d^2 \circ d^3s \neq d^3s \circ d^2$.

2. Verknüpfungstafel zu $(\{8\mathbb{Z}, 1 + 8\mathbb{Z}, 2 + 8\mathbb{Z}, 3 + 8\mathbb{Z}, 4 + 8\mathbb{Z}, 5 + 8\mathbb{Z}, 6 + 8\mathbb{Z}, 7 + 8\mathbb{Z}\}, \cdot)$
Erstellen Sie für $(\{[0]_8, [1]_8, [2]_8, [3]_8, [4]_8, [5]_8, [6]_8, [7]_8\}, \cdot)$ die Verknüpfungstafel bzgl. der Multiplikation als Verknüpfung.

4 BE

Lösungshinweise zu Aufgabe 2

\cdot	$[0]_8$	$[1]_8$	$[2]_8$	$[3]_8$	$[4]_8$	$[5]_8$	$[6]_8$	$[7]_8$
$[0]_8$	$[0]_8$	$[0]_8$	$[0]_8$	$[0]_8$	$[0]_8$	$[0]_8$	$[0]_8$	$[0]_8$
$[1]_8$	$[0]_8$	$[1]_8$	$[2]_8$	$[3]_8$	$[4]_8$	$[5]_8$	$[6]_8$	$[7]_8$
$[2]_8$	$[0]_8$	$[2]_8$	$[4]_8$	$[6]_8$	$[0]_8$	$[2]_8$	$[4]_8$	$[6]_8$
$[3]_8$	$[0]_8$	$[3]_8$	$[6]_8$	$[1]_8$	$[4]_8$	$[7]_8$	$[2]_8$	$[5]_8$
$[4]_8$	$[0]_8$	$[4]_8$	$[0]_8$	$[4]_8$	$[0]_8$	$[4]_8$	$[0]_8$	$[4]_8$
$[5]_8$	$[0]_8$	$[5]_8$	$[2]_8$	$[7]_8$	$[4]_8$	$[1]_8$	$[6]_8$	$[3]_8$
$[6]_8$	$[0]_8$	$[6]_8$	$[4]_8$	$[2]_8$	$[0]_8$	$[6]_8$	$[4]_8$	$[2]_8$
$[7]_8$	$[0]_8$	$[7]_8$	$[6]_8$	$[5]_8$	$[4]_8$	$[3]_8$	$[2]_8$	$[1]_8$

3. Nullteiler

Zeigen Sie: Wenn ein Element a eines Rings $(R, +, \cdot)$ ein Nullteiler ist, dann ist entweder $a + a$ ebenfalls ein Nullteiler, oder $a + a = 0$.

4 BE

Lösungshinweise zu Aufgabe 3

Sei $a \in R \setminus \{0\}$ Nullteiler. Dann gibt es ein $b \in R \setminus \{0\}$ mit $a \cdot b = 0$ (*).

1. Fall: $a + a = 0$

Und damit ist der erste Fall schon abgeschlossen. Warum benötigen wir den ersten Fall?

In diesem Fall kann nach Nullteiler-Definition $a + a$ kein Nullteiler sein, weil dies voraussetzt, dass $a + a \neq 0$.

Beispiel für diesen Fall:

In \mathbb{Z}_8 ist $[4]_8$ ein Nullteiler, wegen $[4]_8 \cdot [2]_8 = [4 \cdot 2]_8 = [8]_8 = [0]_8$.
Andererseits gilt: $[4]_8 + [4]_8 = [4 + 4]_8 = [8]_8 = [0]_8$

2. Fall: $a + a \neq 0$

$$(a + a) \cdot b \stackrel{R \text{ ist distributiv}}{=} a \cdot b + a \cdot b \stackrel{(*)}{=} 0 + 0 \stackrel{0 \text{ ist Nullelement in } R}{=} 0$$

Das ist aber gerade die Definition eines Nullteilers.

4. Nullteiler von $(\{8\mathbb{Z}, 1 + 8\mathbb{Z}, 2 + 8\mathbb{Z}, 3 + 8\mathbb{Z}, 4 + 8\mathbb{Z}, 5 + 8\mathbb{Z}, 6 + 8\mathbb{Z}, 7 + 8\mathbb{Z}\}, \cdot)$

- a) Geben Sie für jede der Restklassen $[0]_8, [1]_8, [2]_8, [3]_8, [4]_8, [5]_8, [6]_8, [7]_8$ modulo 8 an, ob sie Nullteiler in $(\{8\mathbb{Z}, 1 + 8\mathbb{Z}, 2 + 8\mathbb{Z}, 3 + 8\mathbb{Z}, 4 + 8\mathbb{Z}, 5 + 8\mathbb{Z}, 6 + 8\mathbb{Z}, 7 + 8\mathbb{Z}\}, \cdot)$ ist und begründen Sie dies.

4 BE**Lösungshinweise zu Aufgabe 4a)**

- $[0]_8$ ist kein Nullteiler, weil die $[0]_8$ in jedem Produkt $[0]_8 \cdot [1]_8 = [0]_8$, das $[0]_8$, also das neutrale Element der Multiplikation, ergibt, bereits mindestens einmal als Faktor vorkommt.
- $[1]_8$ ist kein Nullteiler, weil ein Produkt, bei dem ein Faktor die $[1]_8$ ist, nur dann gleich $[0]_8$ werden kann, wenn der andere Faktor $[0]_8$ ist, wie etwa bei $[0]_8 \cdot [1]_8 = [0]_8$.
- $[2]_8, [4]_8$ und $[6]_8$ sind Nullteiler, weil folgende Produkte, bei denen kein Faktor die $[0]_8$ ist, trotzdem gleich $[0]_8$ ist:
 $[2]_8 \cdot [4]_8 = [8]_8 = [0]_8$, $[4]_8 \cdot [4]_8 = [16]_8 = [0]_8$ und $[6]_8 \cdot [4]_8 = [24]_8 = [0]_8$, ...
- $[3]_8$ ist kein Nullteiler, weil ein Produkt, bei dem ein Faktor die $[3]_8$ ist, nur dann gleich $[0]_8$ werden kann, wenn der andere Faktor $[0]_8$ ist, wie etwa bei $[0]_8 \cdot [3]_8 = [0]_8$.
- $[5]_8$ ist kein Nullteiler, weil ein Produkt, bei dem ein Faktor die $[5]_8$ ist, nur dann gleich $[0]_8$ werden kann, wenn der andere Faktor $[0]_8$ ist, wie etwa bei $[0]_8 \cdot [5]_8 = [0]_8$.
- $[7]_8$ ist kein Nullteiler, weil ein Produkt, bei dem ein Faktor die $[7]_8$ ist, nur dann gleich $[0]_8$ werden kann, wenn der andere Faktor $[0]_8$ ist, wie etwa bei $[0]_8 \cdot [7]_8 = [0]_8$.

- b) Ist $(\mathbb{Z}_8 \setminus \{[0]_8\}, \cdot)$ eine Gruppe?

1 BE**Lösungshinweise zu Aufgabe 4b)** $(\mathbb{Z}_8 \setminus \{[0]_8\}, \cdot)$ ist keine Gruppe.Zum Beispiel ist $[2]_8$ nicht invertierbar bzgl. \cdot , denn $\forall_{x \in \mathbb{Z}_8 \setminus \{[0]_8\}} [2]_8 \cdot x \neq [1]_8$. $\mathbb{Z}_8 \setminus \{[0]_8\}$ ist bzgl. \cdot auch nicht abgeschlossen, denn $[2]_8 \cdot [4]_8 = [8]_8 = [0]_8 \notin \mathbb{Z}_8 \setminus \{[0]_8\}$ (Siehe Verknüpfungstafel).

- c) Bestimmen Sie für folgenden Gleichungen jeweils die Lösungsmenge in \mathbb{Z}_8 :

$$[3]_8 \cdot x = [7]_8$$

$$[4]_8 \cdot x = [0]_8$$

$$[6]_8 \cdot x = [3]_8$$

$$[2]_8 \cdot x = [4]_8$$

4 BE**Lösungshinweise zu Aufgabe 4c)**

$$[3]_8 \cdot x = [7]_8 \Rightarrow \mathbb{L} = \{[5]_8\}$$

$$[4]_8 \cdot x = [0]_8 \Rightarrow \mathbb{L} = \{[0]_8, [2]_8, [4]_8, [6]_8\}$$

$$[6]_8 \cdot x = [3]_8 \Rightarrow \mathbb{L} = \{\}$$

$$[2]_8 \cdot x = [4]_8 \Rightarrow \mathbb{L} = \{[2]_8, [6]_8\}$$

Erreichbare Gesamtpunktzahl für dieses Übungsblatt:**27 BE**